Corrigé type de l'examen de Mathématiques et Statistique
Promotion : 1^{ier}année SNV

Exercice 1 (08 pts)

1 La probabilité que la machine ait strictement plus de 3 pannes est : **1pt**

$$\mathbb{P}(X>3)=\mathbb{P}(X=4)+\mathbb{P}(X=5)+\mathbb{P}(X=6)=0,1+0,05+0,05=0,2$$

2 Le calcul de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$:

a Le calcul de $\mathbb{E}(X)$: **2pts**

$$\text{On a :}\quad \mathbb{E}(X)=\sum_{i=0}^{6}x_i\times\mathbb{P}(X=x_i)=0\times 0,3+1\times 0,2+\cdots+6\times 0,05=1,9$$

b Le calcul de $\mathbb{V}(X)$: **2pts**

$$\begin{aligned}\text{On a :}\quad \mathbb{V}(X)&=\mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}(X))^2\\&=\sum_{i=0}^{6}x_i^2\times\mathbb{P}(X=x_i)-(\mathbb{E}(X))^2\\&=\big(0\times 0.3+1^2\times 0.2+\cdots+6^2\times 0.05\big)-(1.9)^2=1.9.\end{aligned}$$

3 La fonction de répartition $F(x)$ de X : **2pts**

$$\mathrm{F_X}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 0,3 & \text{si } 0\leqslant x<1\\ 0,5 & \text{si } 1\leqslant x<2\\ 0,65 & \text{si } 2\leqslant x<3\\ 0,80 & \text{si } 3\leqslant x<4\\ 0,90 & \text{si } 4\leqslant x<5\\ 0,95 & \text{si } 5\leqslant x<6\\ 1 & \text{si } x>6\end{cases}$$

4 On a : $\mathbb{P}(X\leq 4)=\sum_{i=0}^{4}\mathbb{P}(X=i)=0.9$. Donc $x_1=4$. **1pt**

Exercice 2 (12 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(4x+3)\mathrm{e}^{-2x}$.

1 Calculons les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$:

a $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(4x+3)e^{-2x}=-\infty.$ **1pt**

b $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(4x+3)e^{-2x}=0.$ **1pt**

2 a La fonction dérivée de f : **1pt**

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= 4e^{-2x} - 2(4x+3)e^{-2x} \\ &= (4 - 2(4x+3))e^{-2x} \\ &= (-8x-2)e^{-2x}.\end{aligned}$$

(b) Le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$: **1,5pts**

- $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (-8x-2)e^{-2x} \geq 0$. Le terme e^{-2x} est toujours positif pour tous $x \in \mathbb{R}$. Il suffit donc de résoudre l'inéquation suivante : $-8x-2 \geq 0$. Ainsi, la solution de l'inéquation est : $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{4}\right]$
- $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow (-8x-2)e^{-2x} \leq 0$. Le facteur e^{-2x} est toujours positif. Il reste à résoudre l'inéquation suivante :$-8x-2 \leq 0$.
  Donc, l'inéquation $(-8x-2)e^{-2x} \leq 0$ est satisfaite pour $x \geq -\frac{1}{4}$. Cela signifie que l'inégalité est vraie pour $x \in \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[$.

(c) Le tableau de variation de f : **1,5pts**

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2\sqrt{e}$	$\searrow$	0

3 (a) Le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 2 de $x \mapsto e^{-x}$: **1pt**
Le développement limité au voisinage de 0 de $u \longmapsto \mathrm{e}^u$ est :

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u) \text{ avec } \lim_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0.$$

En remplaçant $u = -2x$, on obtient :

$$e^{-2x} = 1 - 2x + \frac{(-2x)^2}{2} + x^2\varepsilon(x) = 1 - 2x + 2x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

(b) Le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 2 de la fonction f : **1,5pts**
On a

$$\begin{aligned} f(x) = (4x+3)e^{-2x} &= (4x+3)\left(1 - 2x + 2x^2 + x^2\varepsilon(x)\right) \\ &= 3 - 2x - 2x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.\end{aligned}$$

(c) L'équation de la tangente (Δ) : $y = 3 - 2x$ **1pt**

(d) Étudions la position relative de $(\mathcal{C})$ et de (Δ) : **1pt**
On calcule la différence $f(x) - y$:
On a $f(x) - y = 3 - 2x - 2x^2 + x^2\varepsilon(x) - (3 - 2x) = -2x^2 + x^2\varepsilon(x)$. Le terme dominant de $f(x) - y$ est $-2x^2$, qui est négatif pour tout $x \neq 0$. Cela signifie que $(\mathcal{C})$ est en dessous de sa tangente au voisinage de $x = 0$.

4 Calculons l'intégrale $I = \int_{-\frac{3}{4}}^{3} f(x)\,dx$: **1,5pts**
Nous choisissons :

$$u(x) = (4x+3), \quad v'(x) = e^{-2x}$$

Ainsi :

$$v(x) = \int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}, \quad u'(x) = 4$$

Alors

$$\int_{-\frac{3}{4}}^{3} (4x+3)e^{-2x}\,dx = \left[(4x+3)\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\right]_{-\frac{3}{4}}^{3} - \int_{-\frac{3}{4}}^{3} 4\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx = e^{\frac{3}{2}} - \frac{17}{2}e^{-6}.$$

Une séance de consultation est programmée le 28/01/2025, Salle 4 du Pav A1 à 15h.